數學傳播　48卷4期, pp. 22-34

潮汐現象及沈括定律

莫宗堅 · 黃蘋

本文獻給莫宗堅台中一中高三物理老師石克剛先生[1]。

我們先來討論歷史。五萬年前的冰河期, 大量海水化爲陸上層冰。海水下降, 使得當時印尼群島與歐亞大陸相通。澳大利亞的智人 homo sapiens 從印尼群島航海到澳洲以後, 人類開始意識到潮水的存在。西元十五世紀的大航海之後, 海潮學得到了更多的研究。例如, 西元 1944 年第二次世界大戰, 盟軍登陸諾曼地 Normandy。原本計劃是由英國的海洋學者預先推算出諾曼地落潮的時間, 使德軍佈置的海底障礙物得以大量暴露。盟軍可用炮火先清除, 這樣大塊的海底灘地就失去了防禦工事, 便於盟軍順利登陸。然而大軍行運遲緩, 開戰時遲了半小時, 彼時潮水已開始上升。之後盟軍奮勇作戰, 最終殲滅德軍, 解放歐洲。

古代的中東兩河流域 Mesopotamia 有個塞琉古帝國 Seleucid Empire, 是西元前 323 年亞歷山大大帝死後其帝國分成的三國之一。另兩國則是埃及和希臘 (包括馬其頓)。中國古史稱塞琉古帝國爲條支 (《史記·卷一二三·大宛列傳》有『條支在安息西數千里, 臨西海』)。條支成立於西元前四世紀, 領土由中東、中亞、伊朗組成。西元前三世紀, 條支的部分領土 (今伊朗) 演變爲安息國。張騫將 Parthian Empire, 又稱 Arsacid Empire, 譯爲安息。西元前 150 年, 條支的大城塞琉西亞 Seleucia (在巴比倫附近) 有位學者塞琉可斯 Seleucus, 首推海潮由月亮引起。大約同時, 法國馬賽的畢特阿斯 Pytheas 觀察到英吉利海峽的海潮。西元一世紀時, 東漢學者王充在《論衡》中提出『濤 (即海潮) 之起也, 隨月盛衰。』顯然他也主張海潮是因月亮而起。西元 725 年, 英國的貝德 Bede 長老發現海潮的時刻與月亮在天空的高度有關、而漲幅則與其盈虧有關。這些都是正確的觀察。

而另一方面, 各國對海潮也存在很多誤解。西元九世紀的唐代盧肇寫了著名的《海潮賦》, 該文得到皇帝的褒獎。唐武宗敕批:『盧肇 $\cdots$ 窮測海潮, 出於獨見。$\cdots$ 足成一家之言, 以祛千載之惑, 其賦宜宣付史館。』盧肇認爲『乃知日激水而潮生』, 即太陽出入海洋而激起海潮。這顯然是錯的, 因爲太陽並不出入海洋, 況且漲潮的時刻與日升日落之時亦不合。如今我們知道, 巨

[1]前台大校長陳維昭先生與作者莫宗堅在台中一中高中同班, 他在「臉書」談到《陳維昭回憶錄》(陳維昭著, 毛瓊英整理,「聯經出版社」) 時, 回憶同學少年之情義深重, 懷念物理老師石克剛先生的師恩如山。當時石先生剛從大學畢業, 青年才俊, 是一位優秀的物理老師 (石先生一年之後赴新加坡南洋大學任教)。本文用到的物理學定律, 推演自石先生所授的基礎知識, 皆前人之研究成果。有讀者兩年前在「臉書」閱讀《陳維昭回憶錄》後留言:『石克剛教授是我的大爺爺。今天親自播給他看這段影片, 他樂得不得了! 很榮幸!』。

大無比的太陽若接近地球, 則足以燒乾海洋。所以, 不可能有『日激水而潮生』。西元十世紀, 阿拉伯歷史地理學家馬蘇第 Masudi 的名著《黃金草原》(莫宗堅譯註, 大地出版社) 有一章寫海潮的文字, 羅列了西方各種海潮理論: 例如天使把腳在 (距離阿拉伯很遠的) 中國伸入太平洋, 引起海潮; 或月光把熱量送入海洋, 致使海水膨脹而引起海潮; 等等。中國五代時期, 吳越國王錢鏐認爲海潮是海怪作祟而造成的, 曾令三千弓手用鐵弩射海潮, 欲殺死海怪以平息海潮。時人多以爲奇, 大文豪蘇軾有句:『三千強弩射潮低』, 即是其想像之辭。這些皆是謬思。

古代對海潮比較切實的理解, 再產生於西元十一世紀。西元 1030 年, 宋代余靖觀察海潮, 製圖並點明了月亮的作用, 見余靖的《海潮圖序》:『潮之進退, 海非增減, 蓋月之所臨, 則水往從之。』著名科學家沈括 (1031～1095 年, 字存中, 北宋神宗時代人) 以博學多才而聞名於世, 堪比後世的萊布尼滋 Leibnitz。沈括曾出任宋代政府諸多職位, 提出過許多科學見解, 是中國古代最著名的科學家之一。沈括在《夢溪筆談·補筆談卷二》裡寫:『予常考其 (註: 海潮) 行節, 每至月正臨子 (註: 這時月在地底)、午 (註: 這時月在天頂), 則潮生, 候之萬萬無差。此以海上候之, 得潮生之時。去海遠, 即須據地理增添時刻。』本文稱這段闡述爲「沈括定律」。

若用現代的語言來表達沈括定律,『定義「月的午時」爲月在天頂最高點之時刻、「月的子時」爲兩個相繼的「月的午時」之中間值, 則漲潮發生在、且只發生在月的午時和月的子時。』亦即是說, 當月球視像繞完地球一圈, 潮漲潮落各發生了兩次。古人稱上午的海潮爲「潮」、下午的海潮爲「汐」。由於潮汐發生的時刻, 因地點及天象的差別而異, 故描述海潮發生的時間在古代是一個科學難題。沈括給出了正確的答案。

沈括定律對西太平洋海岸 (包括中國海岸線) 的海潮而言是正確的。但應用到世界範圍, 則需作適當修改。目前中外專家討論海潮, 很少有人追溯到沈括的《夢溪筆談》。古代的科學定律是定性的 qualitative (以文字爲載體) 的經驗定律, 與伽利略和牛頓以及之後的定量的 quantitative (以數字及數學公式爲載體) 的科學定律不同。更由於當時缺乏物理學的解釋, 古人並不明白海潮發生的前因後果, 只是由經驗來判斷海潮何時發生。顯然, 沈括定律是一個經驗定律。隨著近代科學的發展, 物理學不斷地在公理化。像古典的希臘平面幾何那樣, 以最少量的定律作爲公理, 用邏輯學與數學來推導出其餘的定律。作爲經驗總結的沈括定律雖然看似偶然, 但加上古典物理學的解釋, 即成爲必然之理。本文用古典物理學的定律爲公理, 和大家一起用邏輯學與數學來匯出沈括定律。

I. 古典物理學

海潮發生的原因是什麼? 當使用 ChatGPT 查詢時, 若用中文問, 則答案是地-月系統的旋轉離心力 (《黃金草原》, 馬蘇第著, 莫宗堅譯註。第 217 頁曾用此作解)。若用英文問, 則答案是地球的旋轉。這兩個答案都是通常的見解, 可能有錯。我們先來討論作用在海水上的三種力量: (i) 天體的萬有引力。我們要證明其力度非常微弱, 僅地球重力的千萬分之一。萬有引力

本身不會引起洶湧澎湃的海潮, 但由它產生的靜水壓力卻是引發海潮的根本力量, 見 (iii); (ii) 地-月系統的旋轉離心力。我們要證明由於地-月系統的旋轉形態, 它也不會引起海潮; (iii) 廣闊的海域 (譬如三大洋) 彙集而成的、由月球引力產生的靜水壓力。我們要證明它會引發海潮。附帶提一下, 地中海較小, 所以它的靜水壓力也小, 故其海潮未被關注。波羅的海的海潮也很小, 實不足觀。

十七世紀的大數學家和大物理學家牛頓 Issac Newton (西元 1642∼1726) 出生時正當清代順治帝初年。牛頓發現了古典物理學的萬有引力定律, 他認爲海潮之形成是因爲日和月的萬有引力的作用 (Principia 1687)。這個觀點是近代海潮論的基石。讓我們先來談一下古典物理學。

1) **牛頓萬有引力定律**: 設兩物體分別有質量 M_1, M_2, 則兩物體之間存在相互的吸引力 f 如下,

$$f = \mathrm{G}\frac{M_1M_2}{D^2}. \tag{1}$$

這裡 G 是萬有引力常數, D 是兩物體各自的重心之間的距離。吸引力的方向則由接受引力的物體之重心指向發出引力的物體之重心。現在來談重力加速度。假設有一個質量爲 M_1 的凸形物, 那麼在它之外的空間中存在一個重力加速度場 (gravitational accelaration field)。這個場賦於該物體之外、離其重心距離爲 D 的每點一個重力加速度 g,

$$g = \mathrm{G}\frac{M_1}{D^2}. \tag{1+}$$

2) **動力學牛頓第一定律**: 設一物體質量爲 M_2 並有加速度 a, 則

$$\text{力量} = \text{質量} \cdot \text{加速度} = M_2 \cdot a. \tag{2}$$

顯然如果給定 M_1, 則牛頓萬有引力定律可以寫成 $f = M_2 \cdot g$。

在本文中, 我們會常用到公式 (1+), 且稱其爲重力加速度場, 或簡稱爲加速度場。這種說法, 暗合愛因斯坦的《廣義相對論》, 地球的重力加速度場把海水吸附在地表。

因爲重力加速度在海平面的各點相同, 我們定義海平面的深度爲零。

3) **離心力加速度**: 設空中 p 點繞 q 點旋轉, 則 p 點受到一個離心力加速度,

$$\text{離心力加速度} = \text{轉速}^2 \cdot D. \tag{3}$$

上式中, D 是 p 與 q 兩點之間的距離。令圓周角爲 2π, 若 p 點繞 q 點轉完一圈用了 4 秒, 則其轉速是 $\frac{2\pi}{4s} = \frac{\pi}{2s}$, 轉速的單位是 $\frac{1}{s}$。離心力加速度的單位則是 $\frac{m}{s^2}$, 此處 m 是距離的單位 (一般是公尺), 其方向是從 p 點背離 q 點。

雖然海水受到地球自轉帶來的離心力, 但地球勻速旋轉所產生的離心力是穩定的。地面各點到旋轉軸的距離可能不同, 因此各點的離心力也可能不同。但對給定的任何一點, 由於地球的轉速是固定的 (二十四小時旋轉一圓周, 即 2π), 它的離心力是固定的。故而離心力只起到調節海平面高度的作用, 並不引發海潮。

4) **地球重力場的靜水壓力**

通常的物質有氣、液、固三態。氣體形狀不定, 且無一定的體積; 液體形狀不定, 但有一定的體積; 而固體的形狀和體積都是一定的。當液體遇到壓力時, 因爲體積不能改變, 它就會把壓力傳給附近的液體。這樣壓力相繼傳到很遠的地方, 甚至可達萬里之遙。古典物理學的靜水壓力是指重力對靜態水所產生的壓力。

我們舉一個簡單的例子來解說靜水壓力的計算法則。深海某處受到的壓強, 是其上方的海水總重量除以其截面積。這種壓強可以十分強大, 譬如潛水艇偶爾會因靜水壓力而破碎。若有一垂直柱體的水 (水的密度是 1), 深度是 h, 截面積是 A, 則

$$\text{水的總重量} = (Ah)g \tag{4}$$

$$\text{水底的壓強} = (Ah)g/A = hg. \tag{5}$$

這裡 g 是地心吸引力加速度 (在小區域內可當作常數)。靜水壓力 (即壓強) 的單位是 $\frac{m^2}{s^2}$。在公式 (5) 中, 最重要的是深度 h。海中某點的深度可由地心吸引力加速度計算而得。任何具有相同地心吸引力加速度的兩點, 就有同樣的深度。通常海平面的深度定爲零。

當考慮非垂直水柱時, 靜水壓力則是向量場的線積分 (a line integral in a vector field) 問題。向量場的線積分有很多例子, 譬如古典物理學裡, 工作 = 力量 · 距離 (work = force · distance) 的計算方法。

靜水壓力會向各處傳送。城市中建在高處的蓄水塔, 利用密封的水管, 引水越過曲折的管道到達高樓, 使千家萬戶有了自來水。這是西元十九世紀工程師的傑作, 從此解決了廚、浴、廁及各種用水問題。居民有了清潔的水, 才有可能杜絕傳染病。自來水促進了近代城市的興起。早在 4500 年前, 印度河的居民就用陶製的渠道爲各家運水。但那時的輸水道不是密封的, 故無法利用靜水壓力來突破渠道的高低曲折, 達到送水上高樓的目的。

人們通常把海平面由重力決定的深度定爲零。令深度 y 處的地心引力加速度爲 $g = g(y)$, 可見相同深度 (即距地心一樣遠) 的兩點, 其重力加速度相同。令水塔的高度爲 $y = a$ (即深度爲 $-a$), 用戶的高度爲 $y = b$ (即深度爲 $-b$), 這裡 $b < a$, 且密封輸水管各處的高度都小於 a。根據向量場的線積分, 我們可以計算 b 點的靜水壓力爲

$$\int_b^a g(y)\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{r}, \tag{6}$$

這是沿著密封輸水管的積分。此處 $\boldsymbol{n}$ 是重力向量的方向, 即朝著地心的單位向量。$d\boldsymbol{r}$ 是輸水

管的向量。在實際計算時, 用 $\boldsymbol{r}(t)$ 表達輸水管, t 爲參數, $c < t < d$, 即 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$, 此處 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是 x-y-z 坐標系上的單位向量。這樣 $d\boldsymbol{r} = [x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j} + z'(t)\boldsymbol{k}]dt = \boldsymbol{r}'(t)dt$。經過變數變化, 積分的上下限從 a, b 變爲 c, d, 那麼公式 (6) 可改寫如下

$$\int_d^c g(y)\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt. \qquad (6)'$$

5) 月球引力場的靜水壓力

與地球的重力場類似, 其它力場也會引起相應的靜水壓力。月球引力場造成的靜水壓力, 在近月點 (或遠月點) 會引發海潮, 我們將在後面討論。這裡略述地球的重力場不會引起海水傳向遠方的靜水壓力。由於海平面在各地都是等重力面, 即等深度面。當我們順著海平面積分時, 重力方向的 $\boldsymbol{n}$ 與積分方向的 $\boldsymbol{r}'$ 永遠互相垂直, 故內積 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}'$ 爲零。所以重力場沿著海平面的線積分是零, 即海水沒有向遠方作用的靜水壓力。

對月球的引力場而言, 海平面是一個各處深度不等的曲面。故而月球引力場沿著海平面的線積分不會是零, 即海水有向遠方作用的靜水壓力。

一般來說, 如果一個定律可以通過數學和邏輯從已有的物理定律系統中導出, 則它是可以「被理解」的。以下我們用古典物理定律導出沈括定律, 從而證明它是「被理解」的。現代物理學的奇妙之處是, 除了小到 $10^{-9}m$ (即奈米) 範圍的物理現象屬於量子力學、與光速 $3 \cdot 10^8 m/s$ 同級的高速度的物理現象屬於相對論的這兩點之外, 其他物理現象皆可自古典物理學中導出, 因此都是「被理解」的。

科學基於測量, 但測量並不能得到絕對精確的值, 故而研究只能用足夠精確的近似值。本文討論的也是近似值。隨著科技的進步, 測量會越來越精確。因此科學定律不會亙古不變, 它們會越來越趨向精確。

我們把重力場的靜水壓力推廣到月球產生的靜水壓力。本文用月球對三大洋這種大區域所產生的靜水壓力來解釋海潮。

II. 引潮力

萬有引力和自由落體是等價的。月球對地球的引力, 亦可理解成地球向月球在某個瞬間的自由落體。我們假想月球在這個瞬間也移動了一下, 故地球與月球之間的距離並無減少。

地球表面約 71% 是海水, 其餘是陸地。我們爲了計算方便, 假設地球表面全部是等深的海水 (海洋學所用的地球海洋模型, 通常考慮陸地、海洋深度、洋流、風向等等, 要複雜得多)。衆所周知, 月球對地球在各處不均等的引力造成了海潮。第一, 月球對海水及地殼的引力是不等的。因爲各地海平面和月球的距離, 與地心和月球的距離不同。第二, 月球對各地的海水的引力也是不等的。因爲海域的各處與月球的距離不同, 由此引起靜水壓力。

我們現在討論第一點 (第二點會在之後的 V 節討論)。因爲萬有引力與距離的平方成反比, 故在地球向月球自由落體的過程中, 距離越小時, 月球引力就越大。從而導致加速度變大, 積累的速度也大。我們只考慮與月球不同距離的三處: 近月點的海水、地殼及遠月點的海水。如此, 距離月球最近的「近月點」的海水趨月的速度最快, 其次是地殼整體的速度, 即地心趨月的速度, 「遠月點」的海水趨月的速度最慢。由於人們通常認爲地殼是不動的, 就會覺得近月點與遠月點的海水離開地殼上升形成了海潮。

這種說法是否合理, 要經過計算才知道。讓我們考慮一個簡化模型, 即沒有陸地而全是等深海洋的地球: 地球的半徑 $R \sim 6560$ 公里, 地心與月心的距離 $D_m \sim 384400$ 公里 (約爲地球半徑 R 的 59 倍)。月球的質量 $M_m \sim 0.07396 \cdot 10^{24}$ 公斤, 而地球的質量 $M_e \sim 5.9724 \cdot 10^{24}$ 公斤 (約爲月球質量的 81 倍)。

已知地球對海平面的重力加速度 $g = \mathrm{G} \cdot M_e/R^2 = 9.8m/s^2$, 這裡 G 是萬有引力常數, m 表示公尺, s 表示秒。我們來計算月球對地心的引力加速度 (= 對地殼的引力加速度) h_m。

在公式 (1+) 中, 用 $M_e = 81 \cdot M_m$, $R = D_m/59$ 代入,

則 $g = \dfrac{\mathrm{G} \cdot 81M_m}{(D_m/59)^2}$。由此, $h_m = \dfrac{\mathrm{G} \cdot M_m}{D_m^2} = \dfrac{g}{81 \cdot 59^2} = 3.476 \cdot 10^{-5}m/s^2$。

可見月球對地心的引力加速度相當的小。

現在來算月球對地表海水的引力加速度。讓我們先定義一個三維坐標系。

1) 地-月圖的坐標系

作爲參考, 文尾附有一個地-月圖 (取自 Wikipedia 關於海潮 tide 的討論)。我們對地-月建一個垂直坐標系: 令地心爲原點, 定義通過地心和月心的直線爲 y-軸 (在此圖上, y-軸是垂直的, 地心指向月心爲正方向)。定義正 y-軸與地表的交點爲「近月點」、負 y-軸與地表的交點爲「遠月點」。在圖面上定義 x-軸, 與 y-軸垂直並通過地心, 朝右爲正方向。月球繞地球旋轉的軌道在 x-y 平面上, 謂之「白道面」。定義 z-軸與 x-y 平面垂直並通過地心, 朝讀者爲正方向。這樣的 x-y-z 形成右手系。

與傳統一致, 令單位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 爲 x-y-z 坐標系各軸上的單位向量。月心在點 $(0, 59R, 0)$。令 $P(x, y, z)$ 爲地表上任一點, 則 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$。這點到月心的向量是 $(0, 59R, 0) - (x, y, z)$, 或寫成 $(-x)\boldsymbol{i} + (59R-y)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$。這個向量的長度是 $u = [x^2 + (59R-y)^2 + z^2]^{1/2} = (3482R^2 - 118yR)^{1/2}$. 這點到月心的單位向量 $\boldsymbol{n}$ 是

$$\boldsymbol{n} = (-x/u)\boldsymbol{i} + [(59R-y)/u]\boldsymbol{j} - (z/u)\boldsymbol{k}. \tag{7}$$

2) 引潮力

已知月心的坐標爲 $(0, 59R, 0)$, 這裡 R 是地球的半徑, 可見月心與地心的距離相當大。任取地表一點 $P(x, y, z)$, 已知 P 點與地心的距離爲 R, 則 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$。令 P 點與月

心的距離爲 $D(m,P)$, 則 $D(m,P)^2=x^2+(59R-y)^2+z^2=R^2(3482-118y/R)$。

我們來計算月球對地表的點 $P(x,y,z)$ 的引力加速度的值 $g_m(x,y,z)$。令月球的質量爲 M_m, 地球的質量爲 M_e, 按照定義

$$\begin{aligned} g_m(x,y,z) &= \Big[\frac{\mathrm{G}\cdot M_m}{(D(m,P))^2}\Big] = \frac{\mathrm{G}\cdot(M_e/81)}{(R^2-y^2)+(y-59R)^2} \\ &= \frac{\mathrm{G}\cdot M_e}{81\cdot(3482R^2-118yR)} = \frac{\mathrm{G}\cdot M_e/R^2}{81\cdot(3482-118y/R)} \\ &= \frac{g}{[81\cdot(3482-118y/R)]}m/s^2. \end{aligned} \tag{8}$$

可見, 月球對地表點 $P(x,y,z)$ 的吸引力的值僅與 y-值有關。

在近月點, $y=R$, 由式 (8) 得出月球對那裡的海水的引力加速度的值爲

$$g_m(0,R,0)=3.597\cdot 10^{-5}m/s^2.$$

在遠月點, $y=-R$, 月球對那裡的海水的引力加速度的值爲

$$g_m(0,-R,0)=3.361\cdot 10^{-5}m/s^2.$$

我們先前討論過月球對地心的引力加速度的值

$$h_m=3.476\cdot 10^{-5}m/s^2.$$

我們定義月球對地表海水的某點 $P(x,y,z)$ 的引潮力 $F_m(x,y,z)$ 爲:

若 $y>0$, $g_m(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}-h_m\cdot\boldsymbol{j}$,

若 $y<0$, $h_m\cdot\boldsymbol{j}-g_m(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}$。

在近月點, 單位向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{j}$, 那點的引潮力 (即海水離開地殼的加速度) 爲

$$g_m(0,R,0)\boldsymbol{j}-h_m\boldsymbol{j}=1.21\cdot 10^{-6}\frac{m}{s^2}\boldsymbol{j};$$

在遠月點則是

$$h_m\boldsymbol{j}-g_m(0,-R,0)\boldsymbol{j}=1.15\cdot 10^{-6}\frac{m}{s^2}\boldsymbol{j}.$$

對近月點而言, 引潮力 / 重力 $=1.23\cdot 10^{-7}$, 即引潮力僅是地球引力 $(9.8\frac{m}{s^2}\boldsymbol{j})$ 的千萬分之一。可見, 這樣的引潮力是十分微弱的。在遠月點也可得到類似的結論。所以月球的這種引潮力不足以引起萬馬奔騰的海潮。

雖然月球在地表各點的這種引潮力很微弱, 但它積分之後會產生巨大的靜水壓力。這個積分是引潮力向量場的線積分, 積距是地球半徑 $R=6560$ 公里 $=6.56\cdot 10^6m$。巨大的積距彌補了被積的微弱的 10^{-6} 的引潮力。本文的後部我們用靜水壓力來解釋海潮。在這之前, 我們先證明地球繞地-月之共同重心的旋轉加速度 (即離心力) 不會引起海潮。

III. 地-月旋轉的離心力

讓我們換一個角度, 把地球和月球作爲一個旋轉共同體來考慮。我們討論地球與月球繞著一個共同重心轉動時, 地球可能呈現的運動方式。這個共同重心是空間的某個點, 並不一定在物質上。

若我們只考慮地-月系統 (即忽略太陽及宇宙中其它星球的萬有引力), 則這個共同重心在空間是固定的。若我們考慮整個太陽系, 則地–月的共同重心是繞著太陽旋轉的。

首先我們來找共同重心的位置, 它在連接地心與月心的直線上。令共同重心與地心的距離爲 t, 則它與月心的距離爲 $59R-t$。我們知道 $t\cdot M_e = (59R-t)M_m$。已知 $M_e = 81\cdot M_m$, $R = 6560$ 公里, 故 $t = 4720$ 公里, 亦即這個共同重心在地表下約球半徑的 1/4 的地方 。

以下是地球與月球繞著一個共同重心運動時, 地球可能呈現的運動方式。

(a) 無固定方向的運動。譬如, 武士用鐵鍊揮動一個鐵球。若用鐵球與鐵鍊的連接處來表示鐵球的北極, 則當武士揮舞鐵鍊時, 鐵球的北方會不斷地變化。如果鐵球上趴著一個螞蟻, 它就「找不到北」了。我們知道地球的北極指向固定的恒星, 故地球的北方是不變的。所以在地-月系統轉動時, 地球的旋轉不是無固定方向的運動。

(b) 只有一個固定方向的運動。譬如, 陀螺旋轉時可以穩立不倒, 地球是不是如陀螺那樣運動呢? 伊朗的數學家、詩人奧馬·海亞姆 (Omar Khayyam, 西元 1048∼1131, 略後於沈括) 發現日月升降及星空旋轉, 皆是地球自轉的效果。這個運動以固定的南北極爲軸線, 繞著地心 (不是地-月的共同重心) 作均速旋轉。所以地球的自轉是有一個固定方向的運動, 並且它造成了地球所有其它方向的變化。但地球繞著地-月共同重心的旋轉並非只有一個固定方向的運動。

(c) 所有方向都是固定的運動。譬如, 一個方陣裡的士兵同時向左向右和前進後退, 這個方陣的所有方向都不變。即使這個方陣以平移的弧線移動 (包括繞場一圈), 每位士兵之間的距離不變、方陣的整個方向也不變。地球繞著地-月共同重心旋轉的形態與此類似, 並不改變地球的方向。

在這種運動中, 只要知道一點的軌跡, 便可知道整體的軌跡。根據古典物理學, 地心 O 繞著地-月的共同重心 P (空中的點) 在白道面 (月球的視像運動面) 上, 以均角速度 ω 旋轉。這樣旋轉的地球, 它所有的方向都保持不變。令從共同重心 P 到地心 O 的向量爲 $\boldsymbol{V}$, 任取地球的一點 O'。讓我們平行移動 $\boldsymbol{V}$ 使其終點在 O', 遂令移動後的 $\boldsymbol{V}$ 之起點此時的位置爲 P'。我們再平移白道面使之包含 O', 此時它也包含了 P'。O' 繞著 P' 在平移後的白道面上以均角速度 ω 劃出一個圓, 即 O' 的軌跡。這種圓形運動產生的離心力 (Centrifugal force) 與從 O' 到 P' 的距離以及角速度的平方成正比。離心力的方向是從 P' 指向 O', 與從 P 指向 O 是一樣的。由此可見, 作用到地球每一點的離心力是相同的, 亦即它對海水與地殼的作用力之差爲零。所以, 地球與月球繞著共同重心運動時產生的離心力不會引發海潮。

IV. 引潮力的分佈

從第 II 節我們知道引潮力相當微弱, 僅重力的千萬分之一。現在我們來討論引潮力的分佈, 以瞭解它在廣大海面的作用。我們要證明地表與月心等距離的任何點都有等值的引潮力, 而與月心距離不同的點的引潮力則不同。

1) **地表和月球等距離的點**:

在地-月圖上, 通過地心和月心之連線 (即 y-軸) 上的任意一點, 作與 y-軸垂直的平面, 則它與地表相交得到一個圓。若在 y-軸上的每一點都這樣操作, 則得到的所有的圓將覆蓋整個地表。當 y 給定時 $(-R < y < R)$, 就得到了海面引潮力的一個等深圓。我們知道對地球的重力場而言, 海平面是一個等深面。但對月球的引力場而言, 海面則被分成一圈圈的等深圓。

2) **地表與白道面相交的圓**:

月球運行的白道面 (即 $z = 0$) 與地表相交得一圓 A。已知 $y = b$ 的圓 B 與圓 A 相交於兩點。我們只要知道引潮力在交點的值, 就知道圓 B 上所有點引潮力的值了。也就是說, 如果知道圓 A 各點引潮力的值, 我們通過一系列的圓 B, 便可得到地表各點的引潮力的值。我們要證明引潮力的極大值產生在圓 A 的近月點及遠月點。

我們在第 II 節介紹過白道面上的近月點 $(0, R, 0)$ 和遠月點 $(0, -R, 0)$。對任何一點 $P(x, y, z)$, 若 $y > 0$, 引潮力定義爲月球對海水的引力減去月球對地心的引力, 即 $F_m(x, y, z) = g_m(x, y, z)\boldsymbol{n} - h_m\boldsymbol{j}$; 若 $y < 0$, 則 $F_m(x, y, z) = h_m \cdot \boldsymbol{j} - g_m(x, y, z) \cdot \boldsymbol{n}$.

我們先考慮 $y > 0$ 的情形。以下是第 II 節的公式:

$$g_m(y) \cdot \boldsymbol{n} = g_m(x, y, z) \cdot \boldsymbol{n} = \left[\frac{g}{81 \cdot (3482 - 118y/R)}\right] \cdot \boldsymbol{n}. \tag{9}$$

取 $g_m(y)$ 的 y-導函數, 則得

$$g_m{}'(y) = \frac{g(118/R)}{[81 \cdot (3482 - 118y/R)^2]}. \tag{10}$$

當 $0 \leq y \leq R$ 時, $g_m{}'(y)$ 保持正值。所以, 當 y 從 0 增加到 R 時, $g_m(y)$ 是一個遞增函數, 且在 $y = R$ (近月點) 達到極大值。

3) **「正午」與「正子」**

若我們站在地表上任意一點 $Q(a, b, c)$, 觀察月球在白道面上運動。當月球 (視像地) 繞著地球逆時針轉一圈, 我們可以理解成月球不動, 而是地球以 z-軸爲自轉軸順時針轉一圈。如此, $Q(a, b, c)$ 就在地表上畫了一個 $z = c$ 的圓。在這個圓上取一點 $Q'(0, b', c)$, 因爲 $x = 0$, 月亮只可能在天頂或地底。若 $b' > 0$, 則月亮在天頂, 我們稱月在「正午」, Q' 則被稱作近月點。若 $b' < 0$, 則月亮在地底, 我們稱月在「正子」, Q' 被稱作遠月點。

V. 引潮力的靜水壓力

月球對地表海水與對地心不同的吸引力, 產生對海水的引潮力。雖然月球對各地海水有不同的引潮力, 但在相同 y-值的等深圓海面的引潮力卻是相同的。不同的等深圓的引潮力形成了靜水壓力, 這個靜水壓力是引起海潮的原因。這種水壓把各地原本是地球引力的千萬分之一的引潮力聚集起來, 繼而引發海潮。以下我們要解釋這個論點。

1) 近月點的靜水壓力

在宇宙之中, 並無絕對的上下之分。所謂的上下, 不過是重力場給人的感覺。我們現在來討論引潮力所引起的靜水壓力。

對地表任何一點 $P(x,y,z)$, 若 $y>0$, 引潮力定義爲月球對海水的引力減去月球對地心的引力, 即 $F_m(x,y,z)=g_m(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}-h_m\cdot\boldsymbol{j}$; 若 $y<0$, 則 $F_m(x,y,z)=h_m\cdot\boldsymbol{j}-g_m(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}$。這裡只考慮 $y>0$。我們在白道面與地表相交的圓上任取一點 $Q(x,y,0)$。令 v 爲 Q 連向月心的向量, 則 $\boldsymbol{v}$ 的長度是 $u=[x^2+(59R-y)^2+z^2]^{1/2}=(3482R^2-118yR)^{1/2}$。$\boldsymbol{v}$ 的單位向量 $\boldsymbol{n}$ 爲

$$\boldsymbol{n}=(-x/u)\boldsymbol{i}+[(59R-y)/u]\boldsymbol{j}.$$

我們先前介紹過靜水壓力是引潮力向量場的線積分。考慮 $y>0$, 故積分曲線爲白道面與地表相交圓的左上半圓。積分曲線的參數表示式是 $\boldsymbol{r}(y)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(R^2-y^2)^{1/2}\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, 所以 $\boldsymbol{r}'=-y/(R^2-y^2)^{1/2}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, 故得

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'=\frac{y}{(3482R^2-118yR)^{1/2}}+\left[\frac{59R-y}{(3482R^2-118yR)^{1/2}}\right].$$

當 $0<y<R$ 時, 上面的第一項小於 0.02, 第二項則接近 1。我們不妨用近似值 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'\sim 1$。所以

$$\begin{aligned}\int F_m(x,y,z)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'dy &\sim \int[g_m(x,y,z)-h_m]dy\\ &=\int\left\{\frac{g}{[81\cdot(3482-118y/R)]}-\frac{g}{(81\cdot 59^2)}\right\}dy. \qquad (11)\end{aligned}$$

在公式 (11) 裡, 當 $y>R/118$, 則被積函數恒取正值。而 $y=R/118$ 時, 則得 0 值, 故這一點應是計算靜水壓力的起點。我們給公式 (11) 賦予積分的下限 $R/118$ 和上限 R ($y=R$, 即近月點), 得到以下的積分式

$$\int_{R/118}^{R}\left\{\frac{g}{[81\cdot(3482-118y/R)]}-\frac{g}{(81\cdot 59^2)}\right\}dy. \qquad (12)$$

計算之後, 我們得到 $229.957-226.070=3.89\frac{m^2}{s^2}$, 此即近月點的靜水壓力。

我們從引潮力的靜水壓力, 可以算出潮水的高度 h。我們知道, 潮水的高度 h 與重力 g 相乘, 應與引潮力的靜水壓力平衡, 即 $gh = 3.89(\frac{m^2}{s^2})$。這樣就得到 $h = (3.89/9.8)m = 0.4m$。

這個值與地球在白道上的月潮 (因月球引發的海潮) 的高度很接近。計算大潮 (見後) 高度時, 則需合併日潮的高度 (約月潮的 27/59)。因此, 大潮的高度在海平面以上 $0.58m(= 0.4 + 0.4 \cdot 27/59 = 0.58)$, 很接近實測大潮高度 $0.6m$。因爲我們假設地球的表面全部是海水, 且不考慮海的深度、洋流、及海岸形狀等等, 所以計算值與實測值會有不同。

2) **月球引起的海潮**

視像的月球每 24 小時 50 分繞地球一圈。月行道 (即白道) 與地表交圓, 得到的圓周長是 40000 公里。月球繞地球一圈時, 月球引起的海潮 (簡稱月潮) 也繞地一周。時速相當於 1611 公里, 這也是月潮的最大速度。海嘯的時速是 800 公里, 可見月潮的速度遠大於海嘯的速度。海嘯時, 先聽到嘯聲, 再看到海水湧至, 因此海嘯速度低於音速。月潮的速度也超過音速的 1224 公里。所以月潮來時, 速度極快, 有似萬馬奔騰。當然, 地表上距離月行道越遠的地方, 月潮的速度越慢。

其實, 海水的水分子並不順著月潮的方向作超音速運動。觀察海潮經過時的海面漂浮物, 它們只作上下左右的低音速運動。由此可知水分子只作這種低音速運動。高速傳遞的只是海潮波動的形態。按照「相對論」, 物質的運動速度永遠低於光速。但是訊號可以超光速, 就如海潮可以超音速。

VI. 日球引起的海潮

我們可以用對類似月球的討論, 來談日球的引力及靜水壓力。日球也會引起潮水 (簡稱日潮)。我們來比較日球與月球對海潮的作用。我們知道, 日的質量爲月的質量的 27×10^6 倍, 日與地心之距離爲月與地心之距離的 390 倍 (390 的立方爲 59×10^6)。

在近月點, 月引潮力定義爲月球對海水的引力減去月球對地心的引力, 即 $F_m(0,R,0) = g_m(0,R,0) - g_m(0,0,0) \sim g_m'(0,0,0) \cdot R$。同理, 在近日點的日引潮力 $F_s(0,R,0) \sim g_s'(0,0,0) \cdot R$。以數據代入, 不難看出, 近日點的日引潮力/近月點的月引潮力 $\sim 27/59$。

不難證明, 日潮高度 / 月潮高度 $\sim 27/59$。

當月潮受日潮及地形、海洋深度等的影響, 引發的海潮可能更大。例如錢塘江的陰曆八月十五的潮水, 因爲日-地-月形成了一個直線, 所以月潮與日潮相互促進, 相加而成爲大潮。但在不同的地點, 海潮受附近條件的影響, 高度可能不同。印度洋的海潮與錢塘江海潮 (最高 3.5 公尺) 公認爲很大的, 因爲一般地點的海潮最高值是 0.6 公尺。但在世界範圍來說, 最大的海潮發生在加拿大東岸面臨大西洋處的 Bay of Fundy, 潮高 16.5 公尺。

VII. 調和分析 harmonic analysis

我們曾計算月球引潮力是地球萬有引力的千萬分之一。另一方面, 萬有引力是宇宙四力中最弱的。在近距離時, 電磁力是它的 10^{36} 倍。

數學家拉普拉斯 (Laplace) 與歐拉 (Euler) 認爲引潮力的垂直分力, 僅重力的千萬分之一, 不足以解釋潮水。他們用調和分析 (hamonic analysis) 計算引潮力的水平分力 (本文以引潮力的靜水壓力爲論點)。之後威廉湯姆森 (William Thomson, 也稱 Lord Kelvin) 繼承了此法。現代研究海潮者多宗此, 特別是研究小範圍海潮者。

解一組拉普拉斯的海潮微分方程, 可以得到它們的等勢曲面 (equipotential surface) 是橄欖球形狀, 它的長軸指向月球 (近月點) 及遠離月球 (遠月點), 它的短軸在近月點與遠月點之中點而且與長軸垂直的平面上, 兩個短軸互相垂直而且在等勢曲面成一圓。如此得出海水在近月點、和遠月點凸起, 並且可以計算月潮高度。這是現代最通用的求解海潮問題的方法。但是, 這種演算法涉及太多高等數學, 我們存而不論。

VIII. 海潮的泛論

月球每 24 小時又 50 分鐘視像地繞地球轉一圈, 一般海潮發生兩次。因爲 $144 \times (24 + 5/6) \approx 149 \times 24$, 即每 149 太陽日, 一般僅有 144×2 次海潮, 即對每天兩次海潮而言, 缺了 10 次海潮。大約每陰曆月缺 2 次海潮 (這原理大致相同於與陰陽曆法有關係的希臘古天文學家用的默冬周 Metonic cycle)。

海潮常發生在月的正午及月的正子。由於地球的自轉, 在漲潮後約 6 小時又 12.5 分鐘, 人們會看到月落西山 (若漲潮發生在正午) 或月出東海 (若漲潮發生在正子)。再過 6 小時又 12.5 分鐘, 或者月入地底, 或者月上半天。唐詩「春江花月夜」裡有句「海上明月共潮生」, 海上生明月是海水落到最底點的時候。如此說來, 海潮的高度也可從最底點開始計算。我們可以說關於月潮的「沈括定律」在亞洲東岸的海面是正確的。

對多數的海洋而言, 每次月球視像的繞地球一圈, 大致都會發生兩次海潮。由於洋流、地形、海域的大小及深度等等的影響, 有些地方沒有海潮或只有一次海潮。例如, 因面積不夠大, 引潮力的靜水壓力不彰, 故地中海與波羅的海就沒有海潮。又因受地形影響, 墨西哥灣只有一次海潮。兩次海潮大多發生在太平洋的其它地點。英國的某些海岸一天會有四、五次海潮。

「荷馬史詩」沒有提過海潮, 最接近潮水的故事是《奧德賽》裡的海怪 Charybdis 。她是漩渦女怪, 一天噴水三次、吸水三次, 但這與海潮無關。最初發現海潮的歐洲人是西元前四世紀的亞歷山大大帝的水兵。他們航行到印度, 因爲印度洋浩浩渺渺足夠大, 所以有海潮。大約同時, 馬賽的畢特阿斯 Pytheas 發現了廣闊的大西洋帶來的英吉利海峽的潮水。《南海商旅》的作者是希臘人, 他熟悉的地中海沒有海潮, 因爲地中海不夠大。在西元初 (約東漢初年), 這位作者航行到印度洋經商, 發現印度洋的海潮, 很以爲奇。

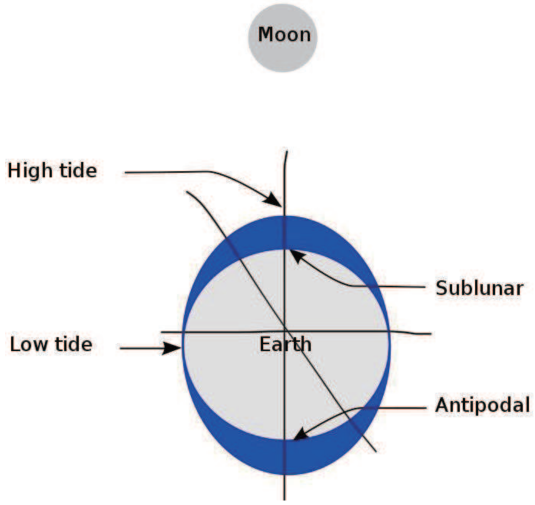
中國文學裡有很多「潮」字。錢塘江在陰曆八月十五日有大潮。因爲是圓月, 日月地在同一

直線, 所以日潮加強月潮。唐詩《江南曲》「早知潮有信, 嫁與弄潮兒」。王維有「日落江湖白, 潮來天地青」。韋應物有「春潮帶雨晚來急」。納蘭性德有「愁似湘江日夜潮」。這最後兩個「潮」字說的內陸河下雨漲水, 與月潮無關。

海潮形成的基本原因是日月的引力、由它們次生的引潮力、以及引潮力再生的靜水壓力。萬有引力有多方面的表現。例如: 月球繞地球一月轉一圈, 地球自轉則一天轉一圈。顯見, 地球自轉要快得多。通過萬有引力, 地球會拉動月球加速前進。月球加速之後, 則飛到更遠的繞地軌道。美國在 1969 年於月球表面設置了鏡子。根據測量它的反射光線, 月球每年向離開地球的遠處移動約 1 吋半。同時, 由於月球與地球的總動量守恆定律, 地球的自轉速度因之減慢。經過一個世紀, 每日增加 2.3 個千分之一秒。經過二百萬年 (相當於人類從直立猿人進化到現代智人的時間), 每日增加 46 秒。經過一億八千萬年, 每日增加 1 小時 9 分。隨著海潮逐漸減弱, 每世紀的時間增加值也會減少 (以上的數值僅供參考)。

人類的未來, 可能是宇宙的星辰大海。宇宙中有億萬星斗, 約 85% 是雙星系 (binary star system) 或多星系 (multiple star system)。星辰是由固體、液體、氣體之外的第四態 - 電漿等離子體 (plasma) 構成的。在雙星系與多星系, 我們可以研究類似海潮的理論。有些雙星系是接觸型的 contact, 即雙星是互相旋轉而近到互相接觸的, 它們或會捲起濤天巨浪, 應爲奇觀。

海潮圖:



—本文作者莫宗堅、黃蘋任教美國 Purdue 大學—